

内項と主項

命題 3.6.(1) より、 $m_i \leq \tilde{m}$ なので全ての部分積項が $\tilde{m} \leq f$ となるわけではない

そこで 特に m_i の部分積項 \tilde{m} の内、 $\tilde{m} \leq f$ を満たすものを f の**内項**と呼ぶ

f の最小項 m_i について $m_i \leq f$ である ($\because g \leq g + h$)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \in T(f)} m_i$$

参考

最短の f の内項を**主項**と呼ぶ

(最短 = リテラルを1つでも削ると内項で無くなる)

何故短い事が重要なのか？

f の内項 \tilde{m} が覆う最小項 (2^{n-k} 個) はすべて f の最小項でもある
($\because \tilde{m} \leq f$, 命題 6.3.(2))

⇒ 短い部分積項 (k が小さい) ほど、多くの最小項を覆う
つまり、多くの最小項を1つに置き換えることができる

主項を見つける事で論理関数を簡単にすることができる！！

具体例

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

$T(f_1)$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

T_n が $T(f)$ をカバーしているか?

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
○				
	○		○	
○	○		○	
			○	
			○	
		○		
○		○		○
				○
	○	○		
○	○	○		

主項の真値集合

$T_1(\bar{x}_3x_4)$	=	($x_1, x_2, 0, 1$)
$T_2(x_2\bar{x}_3)$	=	($x_1, 1, 0, x_4$)
$T_3(x_1\bar{x}_3)$	=	($1, x_2, 0, x_4$)
$T_4(\bar{x}_1, x_2)$	=	($0, 1, x_3, x_4$)
$T_5(x_1\bar{x}_2, x_4)$	=	($1, 0, x_3, 1$)

$$\cup_{p_j \in Q} T(p_j) = T(f)$$

$$Q = 1, 3, 4, 5$$

2の主項 ($x_2\bar{x}_3$) を使っても良いが、他の主項とダブルので無駄

$$f_1 = \bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2x_4$$

($\cdot \cdot \cdot$)。○ ○ (どうやって主項は探すの?)

必須主項：主項で、無いと f をカバー出来なくなる主項
(この例では 2 以外全てが必須主項)

論理関数の簡単化

$$T(f) = \cup_{p_j \in Q} T(p_j) \quad Q \subseteq P_j$$

(a) $|Q|$ が最小

(b) 式全体で使われるリテラルの個数が最小
($|Q|$ が同じ組み合わせが複数あったら)

- カルノー法
 - 3～6変数に適用可能
 - 分かりやすいけど、見落としなどミスもある
- クワイン・マクラスキ法
 - 変数が多くても大丈夫
 - プログラムしやすい
- コンセンサス法など他にも多数の方法がある

カルノー図

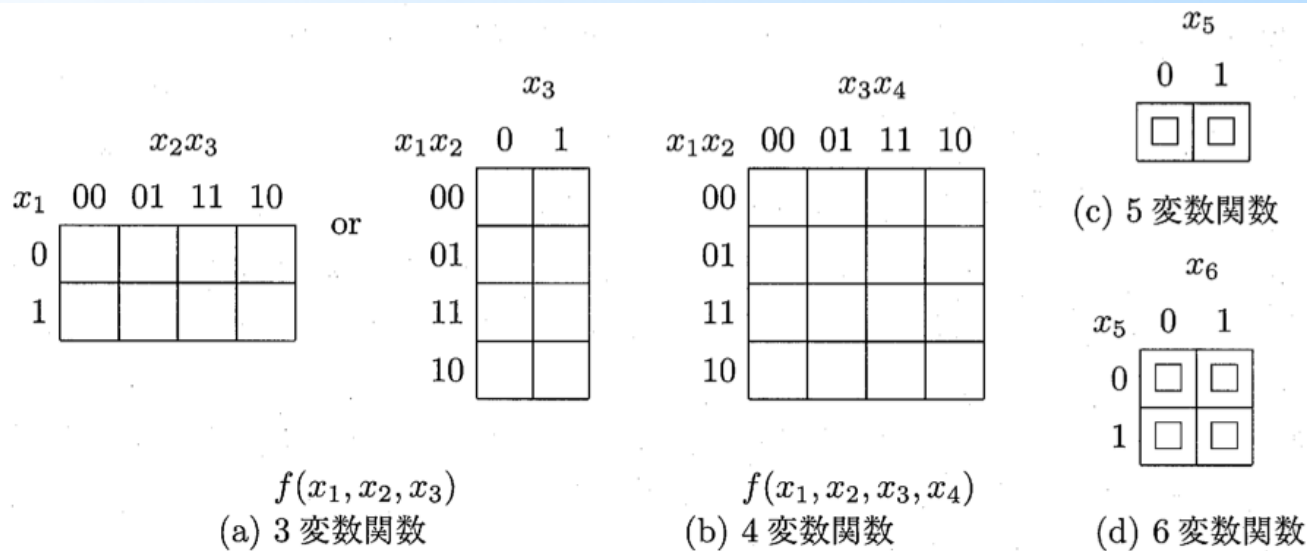
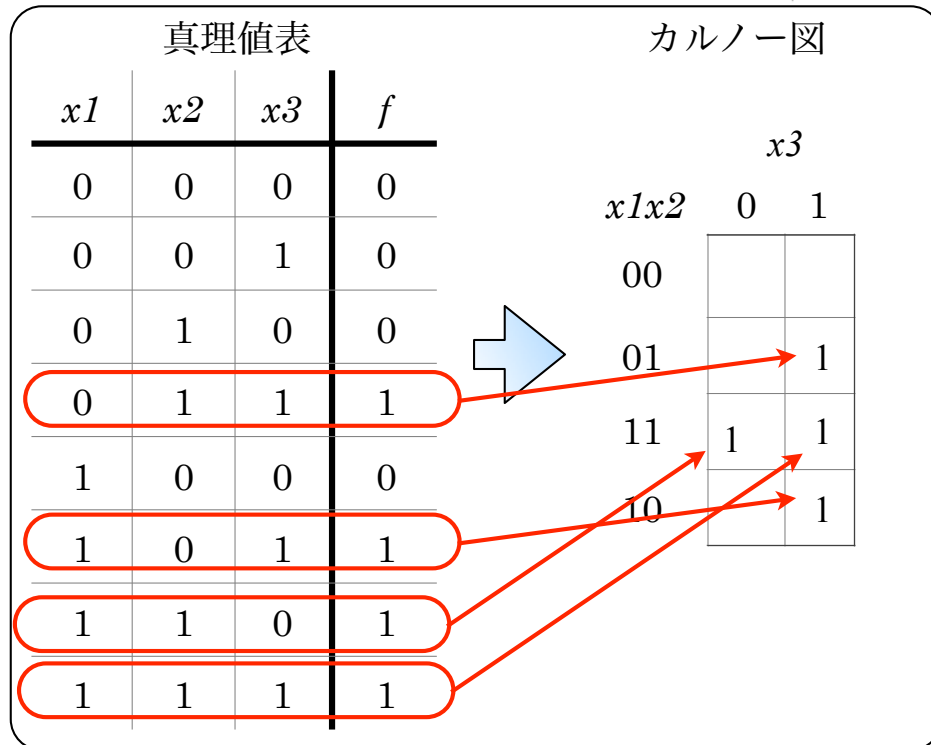


図 3.7 カルノー図



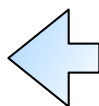
- 真理値表の形を変えただけ
- 00→01→11→10の順で書く
 - 隣と1つだけ0,1が異なる順
- 変数の数によって見た目が変わる

カルノー法ステップ1

- 論理関数のカルノー図を書く

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

	x_3x_4			
x_1x_2	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				



x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

真入力ベクトル

カルノー法ステップ2

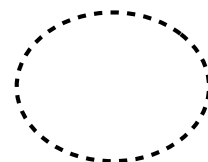
2, 4, 8個の1を含むセルからなる長方形（正方形）の領域で他の領域に含まれないものを探す（主項に対応）

- 左右、上下はつながっていると考える！
- 5変数以上では直方体領域としても探す（16, 32個の1も対象）

	x_3x_4			
x_1x_2	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1	1	

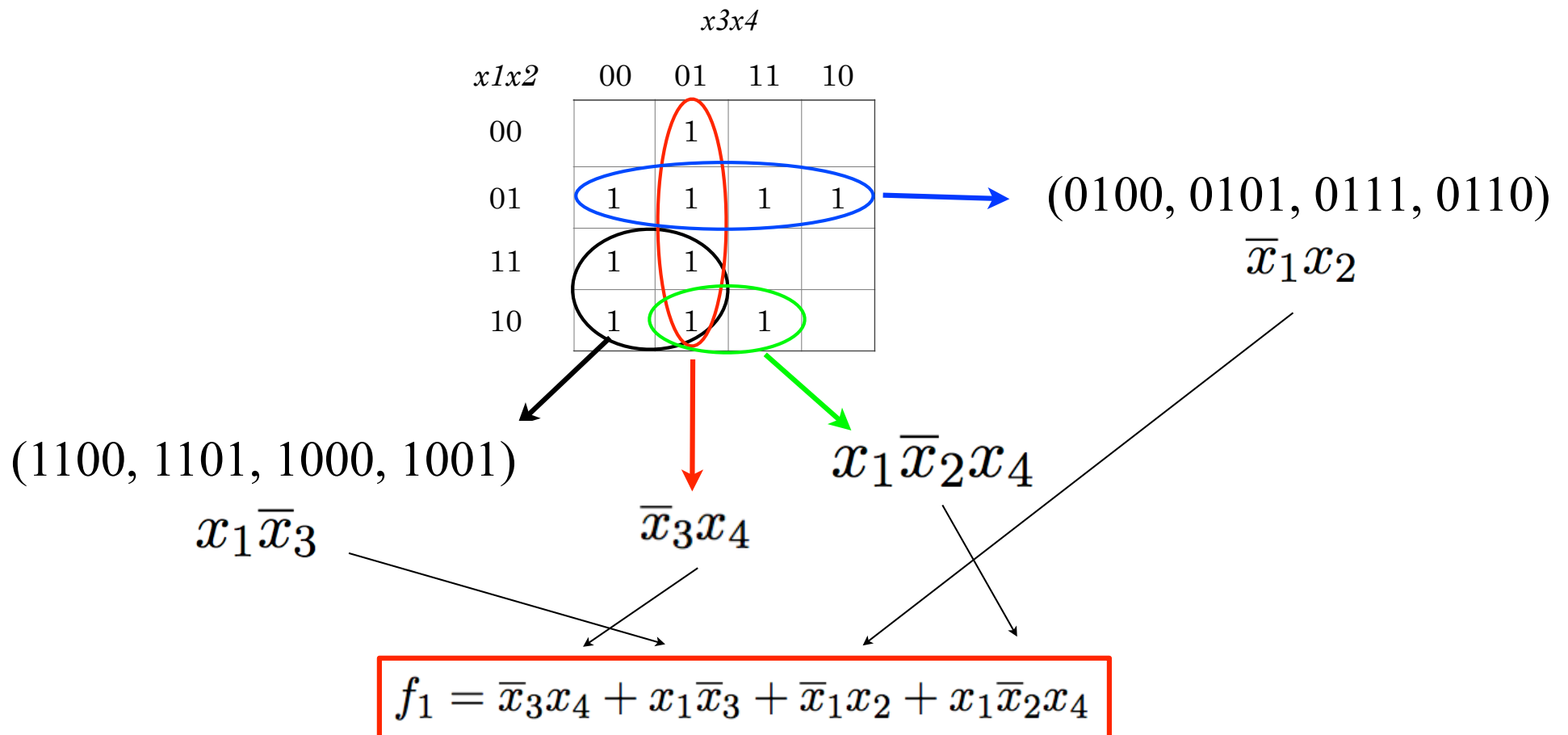
見つけた領域の内、すべての1を覆う最小個数の集合を探す

実線で囲んだ4個

は他の領域に含まれるので選ばない

カルノー法ステップ3

選ばれた領域の辺にあるラベルの共通部分に対応するリテラルから積項を作り、その論理和を取る

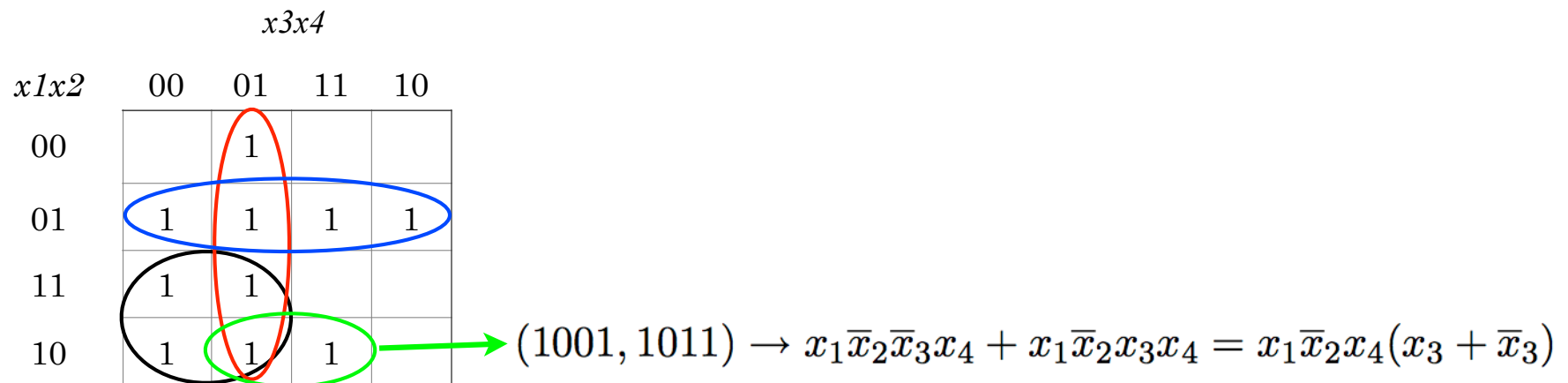


カルノー法のカラクリ

(00, 01, 11, 10) の順で書く事で、1つだけリテラルが異なる積項が隣接する



隣接するセルで同じ項をくくると $x_i + \bar{x}_i$ が出てくる!



5変数で $\tilde{m} = x_1x_2x_3$ の例を考える (つまり、 $n = 5, k = 3$)。

先週の話

$$x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3(x_4 + \bar{x}_4)(x_5 + \bar{x}_5) \quad (\because x + \bar{x} = 1, 1 \cdot x = x)$$

$$= x_1x_2x_3(x_4x_5 + x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_4x_5 + \bar{x}_4\bar{x}_5)$$

2,4,8個の出所

これは5変数の最小項の和に等しい。項の数は $2^{n-k} = 4$ 。

(1) より、 \tilde{m} は最小項 m_i を覆うので、 \tilde{m} は 2^{n-k} 個の最小項を覆っている。

$|T_n(\tilde{m})| = 2^{n-k}$ は、最小項とそれを真とする変数への割り当てが1対1なので。

ここまでのまとめ：論理関数の簡単化

$$T(f) = \cup_{p_j \in Q} T(p_j) \quad Q \subseteq P_j$$

(a) $|Q|$ が最小

(b) 式全体で使われるリテラルの個数が最小
($|Q|$ が同じ組み合わせが複数あったら)

- カルノー法
 - 3～6変数に適用可能
 - 分かりやすいけど、見落としなどミスもある
- クワイン・マクラスキ法
 - 変数が多くても大丈夫
 - プログラムしやすい
- コンセンサス法など他にも多数の方法がある

練習問題

- 3変数多数決関数 $M(x,y,z)$ の最簡形をカルノー法により求めなさい

x	y	z	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$M(x,y,z) = 1$ if x,y,z の 1 の個数が 2 個以上

- 次で定義される論理関数 f_a について、 $a = 2, 3$ の場合の f_2, f_3 のカルノー図を示し、最簡形論理式を示せ。

$$f_a(x,y,z) = 1 \text{ when } 3x - ay + 4z \geq 1.5$$

テストに出る典型的な問題：

○○な論理関数の最簡形を求め、論理回路図を書きなさい

部分論理関数とドントケア

- 部分論理関数：定義域が部分的な関数
 - 入力値に意味が無い場合がある
 - ドントケア入力

例

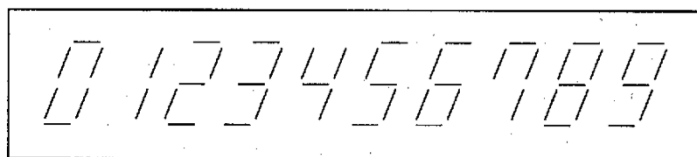


図 3.10 数字の7線分素子表示

		x_1x_0			
		00	01	11	10
x_3x_2	00	1			1
	01				1
	11	*	*	*	*
	10	1		*	*

ドントケア入力での出力は*と書く
 最簡形が簡単になるように*を0,1
 好きなように読む
 (1110, 1010)を1, その他を0と読むと良い

$x_3x_2x_1x_0$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	線分素子表示
0 0 0 0	1	1	1	0	1	1	1	0:
0 0 0 1	0	0	1	0	0	1	0	1:
0 0 1 0	1	0	1	1	1	0	1	2:
0 0 1 1	1	0	1	1	0	1	1	3:
0 1 0 0	0	1	1	1	0	1	0	4:
0 1 0 1	1	1	0	1	0	1	1	5:
0 1 1 0	1	1	0	1	1	1	1	6:
0 1 1 1	1	1	1	0	0	1	0	7:
1 0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	8:
1 0 0 1	1	1	1	1	0	1	1	9:

1010-1111の範囲の入力には意味が無い