

論理式の簡単化の準備 1 : 論理式の大小関係

- お約束 : $0 < 1$
- 定義 : $x \leq y \rightarrow x$ は y に等しいか小さい
 $\rightarrow x$ は y に包含 or 被覆 or カバーされる
と言う

補題 1

1. $x \leq 1$
2. $0 \leq x$
3. $x \leq x + y$ かつ $y \leq x + y$
4. $xy \leq x$ かつ $xy \leq y$

(3)の証明

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(4)の証明

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

論理関数の大小関係

- 論理式の大小関係と同様に、以下のように定義する

$$g \leq f \Leftrightarrow \forall (e_1, e_2, \dots, e_n) \in B^n, g(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

この時、 g は f にカバーされるとか、 f は g をカバーすると言う

例： $M(x, y, z)$ と $x + y$ はどちらが大きいのか？

x	y	z	M	$x+y$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

➡ $M(x, y, z) \leq x + y$

関数の大小関係の調べ方

そこで命題3.4 (コンピュータの基礎)

真理値表を書けば良い

	x	y	z	g	f
	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	1	0	0	1
$T_n(f)$	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	1
$T_n(g)$	1	0	1	1	1
	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1

でも面倒....
抽象的式だと無理

V_g V_f

(1) a-fは同値

(a) $g \leq f$

(b) $T_n(g) \subseteq T_n(f)$

(c) $V_g \leq V_f$

(d) $F_n(g) \supseteq F_n(f)$

(e) $g = 1 \rightarrow f = 1$

(f) $f = 0 \rightarrow g = 0$

(3) $\forall f, f \leq f$ (反射律)

(4) $g \leq f, f \leq h \rightarrow g \leq h$ (推移律)

(5) $f \leq g \cap g \leq f \rightarrow g = f$ (反対称律)

順に黒板で説明

1, 3, 4は自明ですよ?

5は2を使って証明

(2) $g \leq f \Leftrightarrow g \cdot f = g \Leftrightarrow g + f = f$ **重要!**

2の証明: $g \leq f \Rightarrow g \cdot f = g$ の証明:

$$g = 1 \rightarrow f = 1 \rightarrow g \cdot f = g \cdot 1 = g$$

$$g = 0 \rightarrow g \cdot f = 0 = g$$

$$\therefore g \cdot f = g$$

$g \leq f \Leftarrow g \cdot f = g$ の証明:

$$g = 1 \rightarrow f = 1 \cdot f = g \cdot f = g = 1$$

$$\therefore g \leq f \quad (\because (1e))$$

$g + f = f$ も同様。

大小関係は3.4(2)で調べる!!
直感的には(1).bが分かりやすい

一応5も証明: 条件と(2)より、 $f \cdot g = f \cap g \cdot f = g \therefore g = fg = gf = f$

練習問題

以下の不等式を証明しなさい

$$(1) \quad xy \leq x + y$$

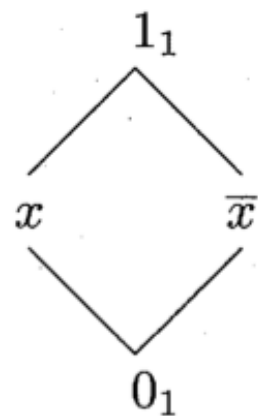
$$(2) \quad xyz \leq xy + yz + zx$$

$$(3) \quad g \leq g + h$$

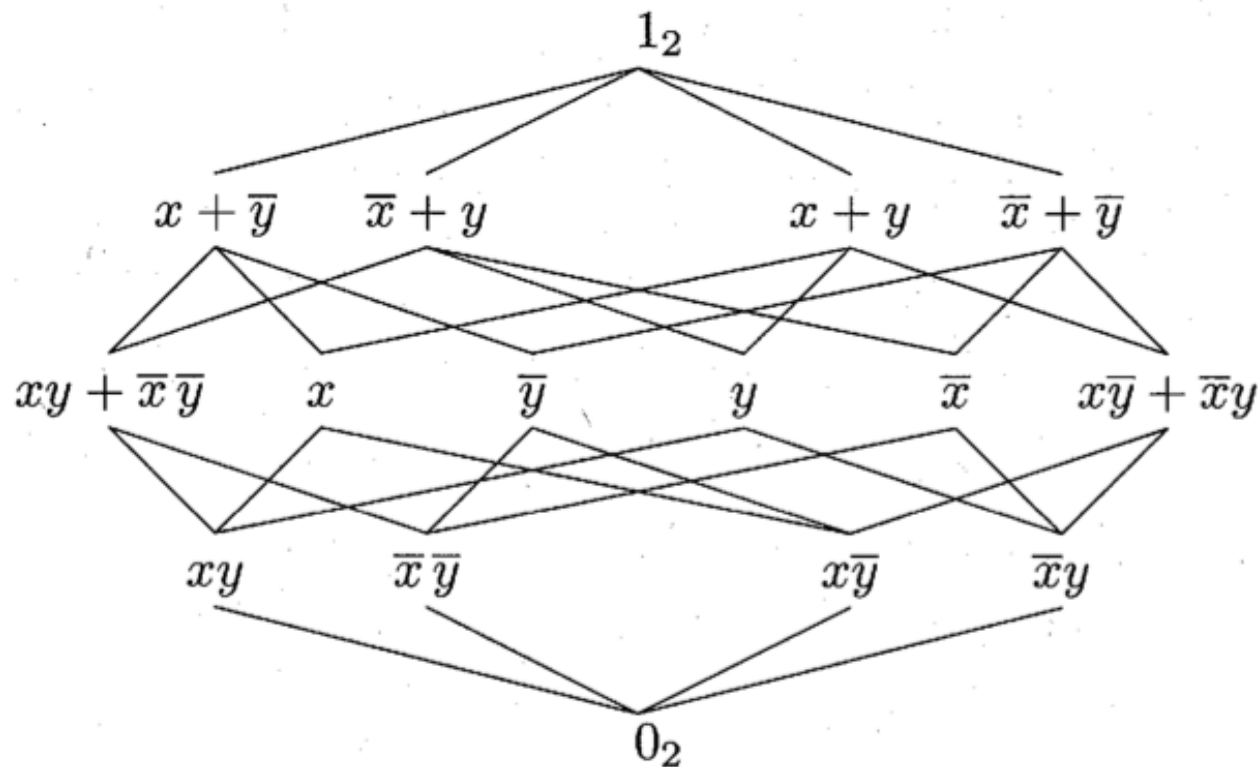
$$(4) \quad g_1 \leq f_1, g_2 \leq f_2 \rightarrow g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$$

$$(5) \quad g_1 \leq f_0, g_2 \leq f_0 \rightarrow g_1 + g_2 \leq f_0$$

順序関係：ハッセ線図



(a) 1 変数関数



(b) 2 変数関数

図 3.6 ハッセ線図

最小項 $m_i = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$

最大項 $M_i = x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + \cdots + x_n^{e_n}$

簡単化の準備その2：部分積項

- 最小項 $m_i = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ の**部分積項**とは、いくつかのリテラルを削除した積項の事
 - 最小項自体も部分積項の一つ
 - 1つ以上のリテラルを削除した部分積項を**真部分積項**と呼ぶ
 - 部分積項の長さを $|m_i|$ で表す
- 例：5変数関数の最小項 $x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5$ に対して、 $x_1 x_2 \bar{x}_5$ は長さ $|x_1 x_2 \bar{x}_5| = 3$ の真部分積項である

ちなみに、その1は先ほどの↓

論理式の簡単化の準備1：論理式の大小関係

部分積項の性質と簡単化の原理

命題3.6:部分積項の性質

\tilde{m} が長さ k で、長さ n の最小項 m_i の部分積項である時

(1) $m_i \leq \tilde{m}$ 。つまり、部分積項は最小項より大きい (最小項を覆う)

(2) \tilde{m} は 2^{n-k} 個の最小項を覆う。つまり、 $|T_n(\tilde{m})| = 2^{n-k}$

証明：(1) べき等律から自明 ($m_i \tilde{m} = m_i$)

(2) $g \leq f \Leftrightarrow g \cdot f = g \Leftrightarrow g + f = f$ 重要!

(2)以下の例を一般化する

5変数で $\tilde{m} = x_1 x_2 x_3$ の例を考える (つまり、 $n = 5, k = 3$)。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 &= x_1 x_2 x_3 (x_4 + \bar{x}_4) (x_5 + \bar{x}_5) \quad (\because x + \bar{x} = 1, 1 \cdot x = x) \\ &= x_1 x_2 x_3 (x_4 x_5 + x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_4 \bar{x}_5) \end{aligned}$$

これは5変数の最小項の和に等しい。項の数は $2^{n-k} = 4$ 。

(1)より、 \tilde{m} は最小項 m_i を覆うので、 \tilde{m} は 2^{n-k} 個の最小項を覆っている。

$|T_n(\tilde{m})| = 2^{n-k}$ は、最小項とそれを真とする変数への割り当てが1対1なので。

つまり5変数の論理関数が

簡単化の原理

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$$

を含めば、これら4つの項は $x_1 x_2 x_3$ という1つの項に置き換えることが出来る

簡単化の具体例

次式で与えられる 4 変数論理関数 f_1 で、 \bar{x}_3x_4 をくくり出して f_1 を簡単化せよ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + \\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

命題3.6を難しく言う：内項と主項

命題 3.6.(1) より、 $m_i \leq \tilde{m}$ なので全ての部分積項が $\tilde{m} \leq f$ となるわけではない

そこで 特に m_i の部分積項 \tilde{m} の内、 $\tilde{m} \leq f$ を満たすものを f の**内項**と呼ぶ

f の最小項 m_i について $m_i \leq f$ である ($\because g \leq g + h$)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \in T(f)} m_i$$

参考

最短の f の内項を**主項**と呼ぶ

(最短 = リテラルを1つでも削ると内項で無くなる)

何故短い事が重要なのか？

f の内項 \tilde{m} が覆う最小項 (2^{n-k} 個) はすべて f の最小項でもある
($\because \tilde{m} \leq f$, 命題 6.3.(2))

⇒ 短い部分積項 (k が小さい) ほど、多くの最小項を覆う
つまり、多くの最小項を1つに置き換えることができる

主項を見つける事で論理関数を簡単にすることができる！！

問題：主項であることを示す

次式で与えられる4変数論理関数 f_1 で、 \bar{x}_3x_4 が主項であることを示せ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

示すべき事 $\bar{x}_3x_4 \leq f_1$ かつ $\bar{x}_3 > f_1$ かつ $x_4 > f_1$

主項は一つではない

$x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_3, \bar{x}_1x_2, x_1\bar{x}_2x_4$ も f_1 の主項である

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + \\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

確認してみよう

論理関数は主項の和で表現できる

定理 3.7

$Q \subseteq P(f)$ となる主項の部分集合 Q が存在して、 $f = \sum_{p_j \in Q} p_j$ となる

証明 $f = \sum m_i$ の時、各 m_i に対して、 $m_i \leq p_j \leq f$ となる主項 p_j が存在する (主項の定義)。

この不等式の両辺の和を取って、 $f = \sum_{T(f)} m_i \leq \sum_{p_j \in Q} p_j \leq f$ なので

$\cup_{p_j \in Q} T(p_j) = T(f)$ となる Q が存在すれば、 $f = \sum_{p_j \in Q} p_j$ となる。

$Q = P(f)$ が条件を満たすので、少なくとも一つは条件を満たす Q が存在する。

具体例は次ページ！

具体例

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

$T(f_1)$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

T_n が $T(f)$ のどこをカバーしているか?

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
○				
	○		○	
○	○		○	
			○	
			○	
		○		
○		○		○
				○
	○	○		
○	○	○		

主項の真値集合

$T_1(\bar{x}_3x_4)$	=	$(x_1, x_2, 0, 1)$
$T_2(x_2\bar{x}_3)$	=	$(x_1, 1, 0, x_4)$
$T_3(x_1\bar{x}_3)$	=	$(1, x_2, 0, x_4)$
$T_4(\bar{x}_1, x_2)$	=	$(0, 1, x_3, x_4)$
$T_5(x_1\bar{x}_2, x_4)$	=	$(1, 0, x_3, 1)$

$$\cup_{p_j \in Q} T(p_j) = T(f)$$

$$Q = 1, 3, 4, 5$$

2の主項 ($x_2\bar{x}_3$) を使っても良いが、他の主項とダブルなので無駄

$$f_1 = \bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2x_4$$

($\cdot \cdot \cdot$)。○ ○ (どうやって主項は探すの?)

必須主項：主項で、無いと f をカバー出来なくなる主項
(この例では 2 以外全てが必須主項)

まとめ

- 論理式の大小関係を理解する
 - 論理式が与えられた際に、大小関係を調べる事が出切るようになる
- 簡単化の原理を理解する
- 「内項」、「主項」、「必須主項」という言葉を理解する
- 主項の見つけ方は次回