論理関数表現のトリニティ（三位一体）

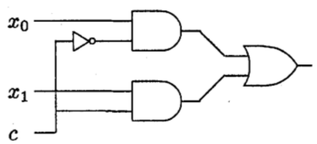
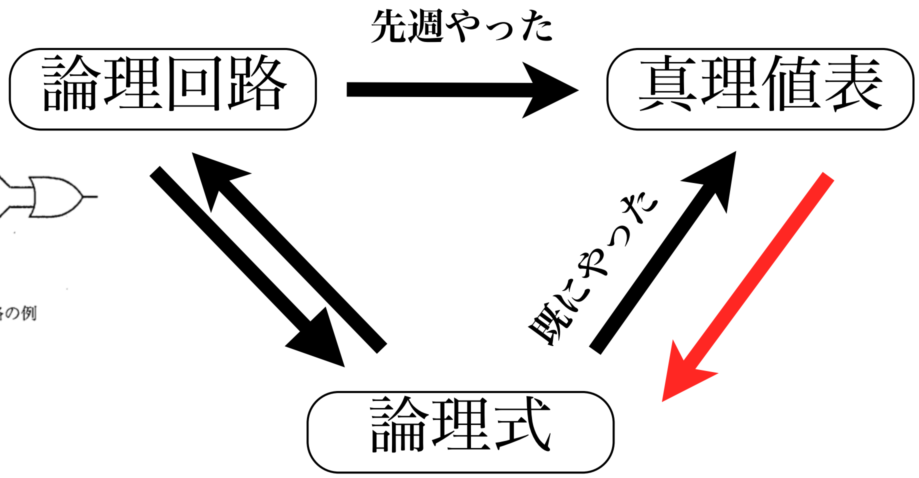


図 3.3 論理回路の例



a	b	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$$

今週やること

○真理値表から論理式

- シャノンの展開定理
- 積和標準形
- 和積標準形

準備編

- シャノンの展開定理

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0)\overline{x}_n + f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1)x_n$$

[証明]

$x_n = 0$ の時

$$\begin{aligned} 右辺 &= f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \cdot \overline{0} + f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1) \cdot 0 \\ &= f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \cdot 1 \\ &= 左辺 \end{aligned}$$

$x_n = 1$ の時も同様

意味

*n*変数論理関数が*n-1*変数論理関数と論理変数の論理演算で書ける

繰り返し適用するとどうなるだろうか？

リテラル表記と積和標準形

- リテラル

$$x_k^{e_k} = \begin{cases} x_k \quad (= x_k^1) \quad \text{if} \quad e_k = 1 \\ \overline{x}_k \quad (= x_k^0) \quad \text{if} \quad e_k = 0 \end{cases}$$

肯定リテラル

否定リテラル

- リテラルの積を**積項**あるいは単に**項**と呼ぶ
- リテラルの表記を用いると

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0)\overline{x}_n + f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1)x_n$$

を繰り返し適用して

$$\boxed{f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in B^n} f(e_1, e_2, \cdots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}}$$

と書ける！（証明は数学的帰納法による(省略)）

困ったときの具体例

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in B^n} f(e_1, e_2, \cdots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$$

- $n = 2$ の時

$$f(x_1, x_2) = f(0,0)\overline{x}_1\overline{x}_2 + f(0,1)\overline{x}_1 x_2 + f(1,0) x_1 \overline{x}_2 + f(1,1) x_1 x_2$$

x1	*x2*	*f*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

どこかで見たこと無いですか？

XORですね

とすると

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \cdot \overline{x}_1\overline{x}_2 + 1 \cdot \overline{x}_1 x_2 + 1 \cdot x_1 \overline{x}_2 + 0 \cdot x_1 x_2 \\ &= \overline{x}_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2 \end{aligned}$$

なる

やってみよう具体例

- $n = 3$ の時

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = \; & f(0,0,0)\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \;+\; f(0,0,1)\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \;+\; f(0,1,0)\overline{x}_1 x_1\overline{x}_3 \;+ \\
& f(0,1,1)\overline{x}_1 x_2 x_3 \;+\; f(1,0,0)x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \;+\; f(1,0,1)x_1\overline{x}_2 x_3 \;+ \\
& f(1,1,0)x_1 x_2\overline{x}_3 \;+\; f(1,1,1)x_1 x_2 x_3
\end{aligned}
$$

x1	*x2*	*x3*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1 x_2\overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

<u>結局、真理値表で 1 の所に対応する最小項を＋でつなぐだけ</u>

形式的に書くと $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i \in T(f)} m_i$

$m_i = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ を最小項と呼ぶ

$T(f)$ は $f = 1$ となる入力の値の組で真入力ベクトル

積和標準形の例２

- $n = 2$ でORの場合

$$\boxed{f(x_1, x_2) = f(0,0)\overline{x}_1\overline{x}_2 + f(0,1)\overline{x}_1 x_2 + f(1,0)x_1\overline{x}_2 + f(1,1)x_1 x_2}$$

x1	*x2*	*f*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

積和標準形 ≠ 最簡形

となので

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \overline{x}_1 x_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2 \\ &= x_1 x_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2 \\ &= x_1(x_2 + \overline{x}_2) + x_2(x_1 + \overline{x}_1) \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

OR?

和積標準形

- Shannonの展開定理の和のバージョン

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = (f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) + x_n)(f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1) + \overline{x}_n)$$

(繰り返し適用して)

$$= \prod_{(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in B^n} (f(e_1, e_2, \cdots, e_n) + x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \cdots + x_n^{\bar{e}_n})$$

$$= \prod_{(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in F(f)} (x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \cdots + x_n^{\bar{e}_n}) = \prod_{i \in F(f)} M_i$$

M_i を最大項と呼ぶ

$F(f)$ は $f = 0$ となる入力の値の組で偽入力ベクトルと呼ぶ

例)

$x1$	$x2$	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

注）$0 + x = x,\ 1 + x = 1$

$$f = x1 + x2$$

[参考] 積和標準形を二重否定して、ド・モルガン則を使って変形すると和積標準形が得られる

やってみよう具体例

- $n = 3$ の時

$x1$	$x2$	$x3$	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)$$

結局、真理値表で0の所に対応する最大項をANDでつなぐ

積和とは肯定・否定リテラルの選択が逆な点に注意

積和：1 → 肯定（$1 \cdot x = x$）

和積：0 → 肯定（$0 + x = x$）

練習問題

- 3変数多数決関数*M(x,y,z)*の積和標準形と和積標準形を書きなさい

$$M(x,y,z) = 1 \text{ if } x,y,z \text{ の } 1 \text{ の個数が } 2 \text{ 個以上}$$

- *3*変数パリティ関数の積和標準形と和積標準形を書きなさい

$$P(x,y,z) = 1 \text{ if } x,y,z \text{ の } 1 \text{ の個数が奇数個}$$

x	y	z	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x	y	z	P
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

まとめ

- 真理値表から標準形を書き下せるようになる
- 標準形として、「積和標準形」と「和積標準形」の２つを理解する
- 標準形は必ずしも最簡形では無いことを理解する
- 最小項、最大項のリテラル表記になじむ