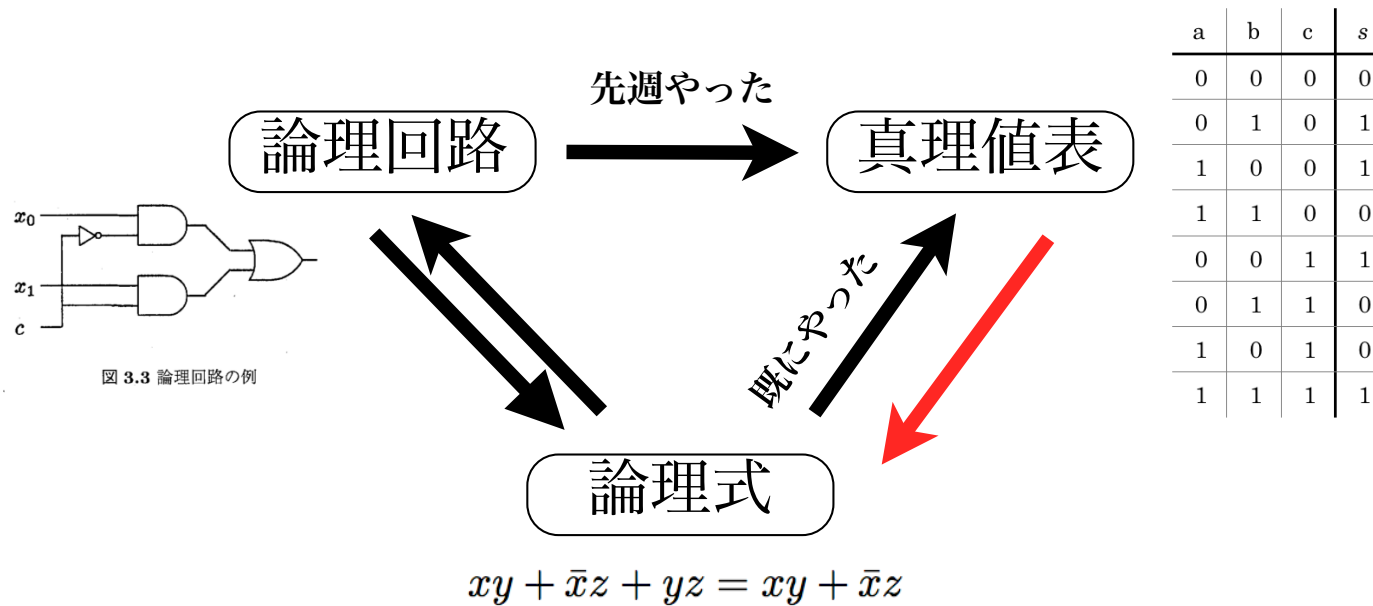


論理関数表現のトリニティ (三位一体)



今週やること

○真理値表から論理式

- シャノンの展開定理
- 積和標準形
- 和積標準形

準備編

- シャノンの展開定理

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)\bar{x}_n + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)x_n$$

[証明]

$x_n = 0$ の時

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \cdot \bar{0} + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \cdot 0 \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \cdot 1 \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$

$x_n = 1$ の時も同様

意味

n 変数論理関数が $n-1$ 変数論理関数と論理変数の論理演算で書ける

繰り返し適用するとどうなるだろうか？

リテラル表記と積和標準形

- リテラル

$$x_k^{e_k} = \begin{cases} x_k & (= x_k^1) & \text{if } e_k = 1 & \text{肯定リテラル} \\ \bar{x}_k & (= x_k^0) & \text{if } e_k = 0 & \text{否定リテラル} \end{cases}$$

- リテラルの積を**積項**あるいは単に**項**と呼ぶ
- リテラルの表記を用いると

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)\bar{x}_n + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)x_n$$

を繰り返し適用して

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in B^n} f(e_1, e_2, \dots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$$

と書ける！（証明は数学的帰納法による(省略)）

困ったときの具体例

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in B^n} f(e_1, e_2, \dots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$$

- $n = 2$ の時

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0)\bar{x}_1\bar{x}_2 + f(0, 1)\bar{x}_1x_2 + f(1, 0)x_1\bar{x}_2 + f(1, 1)x_1x_2$$

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

どこかで見たこと無いですか？

XORですね

とすると

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \cdot \bar{x}_1\bar{x}_2 + 1 \cdot \bar{x}_1x_2 + 1 \cdot x_1\bar{x}_2 + 0 \cdot x_1x_2 \\ &= \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 \end{aligned}$$

なる

やってみよう具体例

- $n = 3$ の時

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & f(0, 0, 0)\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + f(0, 0, 1)\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + f(0, 1, 0)\bar{x}_1x_1\bar{x}_3 + \\ & f(0, 1, 1)\bar{x}_1x_2x_3 + f(1, 0, 0)x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + f(1, 0, 1)x_1\bar{x}_2x_3 + \\ & f(1, 1, 0)x_1x_2\bar{x}_3 + f(1, 1, 1)x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$

結局、真理値表で 1 の所に対応する最小項を + でつなぐだけ

形式的に書くと $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i \in T(f)} m_i$

$m_i = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ を最小項と呼ぶ

$T(f)$ は $f = 1$ となる入力の値の組で真入力ベクトル

積和標準形の例 2

- $n = 2$ でORの場合

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0)\bar{x}_1\bar{x}_2 + f(0, 1)\bar{x}_1x_2 + f(1, 0)x_1\bar{x}_2 + f(1, 1)x_1x_2$$

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

積和標準形 \neq 最簡形

となので

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 && \text{OR?} \\ &= x_1x_2 + \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 \\ &= x_1(x_2 + \bar{x}_2) + x_2(x_1 + \bar{x}_1) \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

和積標準形

- Shannonの展開定理の和のバージョン

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= (f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) + x_n)(f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) + \bar{x}_n) \\ &\quad (\text{繰り返し適用して}) \\ &= \prod_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in B^n} (f(e_1, e_2, \dots, e_n) + x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \dots + x_n^{\bar{e}_n}) \\ &= \prod_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in F(f)} (x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \dots + x_n^{\bar{e}_n}) = \prod_{i \in F(f)} M_i \end{aligned}$$

M_i を最大項と呼ぶ

例)

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f = x_1 + x_2$

$F(f)$ は $f = 0$ となる入力の値の組で偽入力ベクトルと呼ぶ

注) $0 + x = x, 1 + x = 1$

[参考] 積和標準形を二重否定して、ド・モルガン則を使って変形すると和積標準形が得られる

やってみよう具体例

- $n = 3$ の時

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

結局、真理値表で0の所に対応する最大項をANDでつなく

積和とは肯定・否定リテラルの選択が逆な点に注意

積和：1 → 肯定 ($1 \cdot x = x$)

和積：0 → 肯定 ($0 + x = x$)

練習問題

- 3変数多数決関数 $M(x,y,z)$ の積和標準形と和積標準形を書きなさい

$M(x,y,z) = 1$ if x, y, z の 1 の個数が 2 個以上

- 3変数パリティ関数の積和標準形と和積標準形を書きなさい

$P(x,y,z) = 1$ if x, y, z の 1 の個数が奇数個

x	y	z	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x	y	z	P
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1