内項と主項

命題 3.6.(1) より、$m_i \leq \tilde{m}$ なので全ての部分積項が $\tilde{m} \leq f$ となるわけではない

そこで 特に m_i の部分積項 $\tilde{m}$ の内、$\tilde{m} \leq f$ を満たすものを f の**内項**と呼ぶ

f の最小項 m_i について $m_i \leq f$ である $(\because g \leq g + h)$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i \in T(f)} m_i$

参考

最短の f の内項を**主項**と呼ぶ

(最短 =リテラルを 1 つでも削ると内項で無くなる)

何故短い事が重要なのか？

f の内項 $\tilde{m}$ が覆う最小項（2^{n-k} 個) はすべて f の最小項でもある

$(\because \tilde{m} \leq f,$ 命題 6.3.(2))

$\Rightarrow$ 短い部分積項 (k が小さい）ほど、多くの最小項を覆う

つまり、多くの最小項を 1 つに置き換えることができる

主項を見つける事で論理関数を簡単にする事ができる！！

論理関数は主項の和で表現できる

定理 3.7
$Q \subseteq P(f)$ となる主項の部分集合 Q が存在して、$f = \sum_{p_j \in Q} p_j$ となる

証明

$f = \sum m_i$ の時、各 m_i に対して、$m_i \leq p_j \leq f$ となる主項 p_j が存在する（主項の定義）。

この不等式の両辺の和を取って、$f = \sum_{T(f)} m_i \leq \sum_{p_j \in Q} p_j \leq f$ なので

$\cup_{p_j \in Q} T(p_j) = T(f)$ となる Q が存在すれば、$f = \sum_{p_j \in Q} p_j$ となる。

$Q = P(f)$ が条件を満たすので、少なくとも一つは条件を満たす Q が存在する。

具体例は次ページ！

具体例

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$$

T(f1)

x1	*x2*	*x3*	*x4*
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

TnがT(f)をカバーしているか？

T1	*T2*	*T3*	*T4*	*T5*
○				
	○		○	
○	○		○	
			○	
			○	
		○		
○		○		○
				○
	○	○		
○	○	○		

主項の真値集合

$$\begin{array}{lcl}
T_1(\overline{x}_3x_4) & = & (\ x_1,\ x_2,\ 0,\ 1\ ) \\
T_2(x_2\overline{x}_3) & = & (\ x_1,\ 1,\ 0,\ x_4\ ) \\
T_3(x_1\overline{x}_3) & = & (\ 1,\ x_2,\ 0,\ x_4\ ) \\
T_4(\overline{x}_1,x_2) & = & (\ 0,\ 1,\ x_3,\ x_4\ ) \\
T_5(x_1\overline{x}_2,x_4) & = & (\ 1,\ 0,\ x_3,\ 1\ )
\end{array}$$

$$\cup_{p_j\in Q}T(p_j) = T(f)$$

$$Q = 1,3,4,5$$

2の主項 $(x_2\overline{x}_3)$ を使っても良いが、
他の主項とダブルので無駄

$$\boxed{f_1 = \overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2 + x_1\overline{x}_2x_4}$$

(・・*)。。oO(どうやって主項は探すの？)

必須主項：主項で、無いと f をカバー出来なくなる主項

（この例では２以外全てが必須主項）

論理関数の簡単化

$$T(f) = \cup_{p_j \in Q} T(p_j) \qquad Q \subseteq P_j$$

(a) $|Q|$ が最小

(b) 式全体で使われるリテラルの個数が最小
(|Q|が同じ組み合わせが複数あったら)

- カルノー法
  - ３～６変数に適用可能
  - 分かりやすいけど、見落としなどミスもある
- クワイン・マクラスキ法
  - 変数が多くても大丈夫
  - プログラムしやすい
- コンセンサス法など他にも多数の方法がある

カルノー図

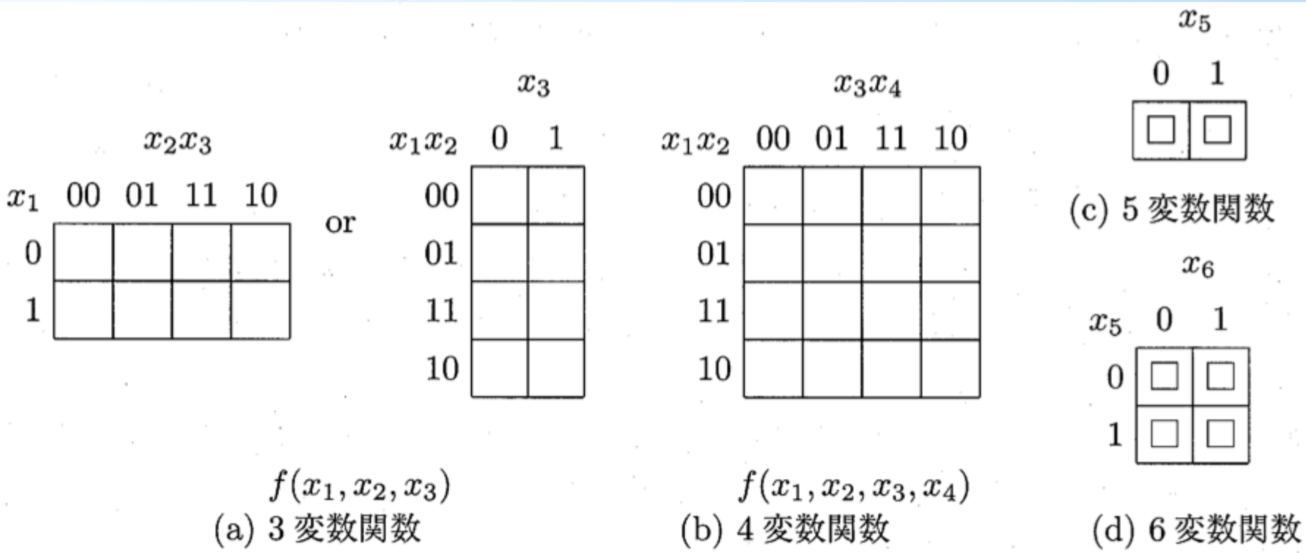


図 3.7　カルノー図

真理値表

x1	*x2*	*x3*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

カルノー図

x1x2 \ *x3*	0	1
00		
01		1
11	1	1
10		1

- 真理値表の形を変えただけ
- 00→01→11→10の順で書く
  - **隣と1つだけ0,1が異なる順**
- 変数の数によって見た目が変わる

カルノー法ステップ1

- 論理関数のカルノー図を書く

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$$

x3x4

x1x2	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

x1	*x2*	*x3*	*x4*
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

真入力ベクトル

カルノー法ステップ２

2, 4, 8個の１を含むセルからなる長方形（正方形）の領域で
他の領域に含まれないものを探す（主項に対応）

- 左右、上下はつながっていると考える！
- ５変数以上では直方体領域としても探す（16, 32個の１も対象）

x1x2 \ *x3x4*	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1	1	

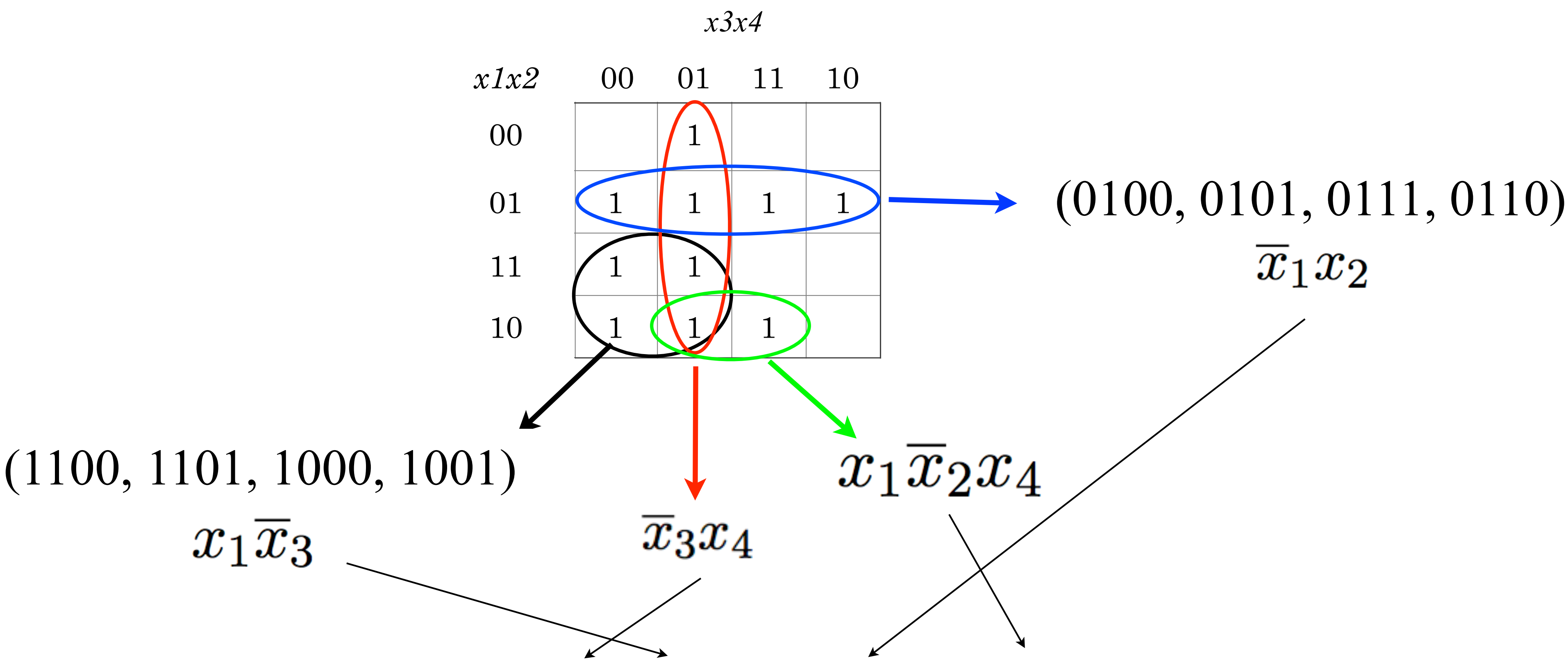
見つけた領域の内、すべての１を覆う最小個数の集合を探す

実線で囲んだ4個

は他の領域に含まれるので選ばない

カルノー法ステップ３

<u>選ばれた領域の辺にあるラベルの共通部分</u>に対応するリテラルから積項を作り、その論理和を取る



$$\boxed{f_1 = \overline{x}_3 x_4 + x_1 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2 x_4}$$

カルノー法のカラクリ

$(00, 01, 11, 10)$ の順で書く事で、1つだけリテラルが異なる積項が隣接する

⇩

隣接するセルで同じ項をくくると $x_i + \overline{x}_i$ が出てくる！

		x3x4		
x1x2	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1	1	

$(1001, 1011) \to x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 = x_1\overline{x}_2x_4(x_3 + \overline{x}_3)$

5 変数で $\tilde{m} = x_1x_2x_3$ の例を考える（つまり、$n = 5, k = 3$)。　先週の話

$$x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3(x_4 + \overline{x}_4)(x_5 + \overline{x}_5) \quad (\because x + \overline{x} = 1, 1 \cdot x = x)$$

$$= x_1x_2x_3(x_4x_5 + x_4\overline{x}_5 + \overline{x}_4x_5 + \overline{x}_4\overline{x}_5)$$

2,4,8個の出所

これは 5 変数の最小項の和に等しい。項の数は $2^{n-k} = 4$。

(1) より、$\tilde{m}$ は最小項 m_i を覆うので、$\tilde{m}$ は 2^{n-k} 個の最小項を覆っている。

$|T_n(\tilde{m})| = 2^{n-k}$ は、最小項とそれを真とする変数への割り当てが 1 対 1 なので。

ここまでのまとめ：論理関数の簡単化

$T(f) = \cup_{p_j \in Q} T(p_j) \qquad Q \subseteq P_j$

(a) $|Q|$ が最小

(b) 式全体で使われるリテラルの個数が最小
(|Q|が同じ組み合わせが複数あったら）

- カルノー法
  - ３～６変数に適用可能
  - 分かりやすいけど、<u>見落としなどミスもある</u>
- クワイン・マクラスキ法
  - 変数が多くても大丈夫
  - プログラムしやすい
- コンセンサス法など他にも多数の方法がある

練習問題

- 3変数多数決関数*M(x,y,z)*の最簡形をカルノー法により求めなさい

x	y	z	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$M(x, y, z) = 1$ if x, y, z の 1 の個数が 2 個以上

次で定義される論理関数 f_a について、$a = 2, 3$ の場合の f_2, f_3 のカルノー図を示し、最簡形論理式を示せ。

$$f_a(x, y, z) = 1 \text{ when } 3x - ay + 4z \geq 1.5$$

テストに出る典型的な問題：

○○な論理関数の最簡形を求め、論理回路図を書きなさい