論理式の簡単化の準備１：論理式の大小関係

- お約束： 0 < 1
- 定義： $x \leq y$ → x は y に等しいか小さい
  → x は y に包含 or 被覆 or カバーされる
  と言う

補題 1

1. $x \leq 1$
2. $0 \leq x$
3. $x \leq x + y$ かつ $y \leq x + y$
4. $xy \leq x$ かつ $xy \leq y$

(3)の証明

x	y		$x+y$
0	0	$\leq$	0
0	1	$\leq$	1
1	0	$\leq$	1
1	1	$\leq$	1

(4)の証明

x	y		xy
0	0	$\geq$	0
0	1	$\geq$	0
1	0	$\geq$	0
1	1	$\geq$	1

論理関数の大小関係

- 論理式の大小関係と同様に、以下のように定義する

$$g \leq f \Leftrightarrow \forall (e_1, e_2, \cdots, e_n) \in B^n,\ g(e_1, e_2, \cdots, e_n) \leq f(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

この時、g は f にカバーされるとか、f は g をカバーすると言う

例：$M(x, y, z)$ と $x + y$ はどちらが大きいか？

x	y	z	M	$x+y$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$\Rightarrow \quad M(x, y, z) \leq x + y$$

関数の大小関係の調べ方

そこで命題3.4（コンピュータの基礎）

(1) a-fは同値

(a) $g \le f$

(b) $T_n(g) \subseteq T_n(f)$

(c) $V_g \le V_f$

(d) $F_n(g) \supseteq F_n(f)$

(e) $g = 1 \to f = 1$

(f) $f = 0 \to g = 0$

(3) $\forall f, f \le f$ (反射律)

(4) $g \le f, f \le h \to g \le h$ (推移律)

(5) $f \le g \cap g \le f \to g = f$ (反対称律)

(2) $g \le f \Leftrightarrow g \cdot f = g \Leftrightarrow g + f = f$ 重要！

順に黒板で説明

1, 3, 4は自明ですよね？

5は2を使って証明

真理値表を書けば良い

x	y	z	g	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$T_n(f)$　$T_n(g)$

V_g　V_f

でも面倒....

抽象的式だと無理

2の証明： $g \le f \Rightarrow g \cdot f = g$ の証明:

$g = 1 \to f = 1 \to g \cdot f = g \cdot 1 = g$

$g = 0 \to g \cdot f = 0 = g$

$\therefore g \cdot f = g$

$g \le f \Leftarrow g \cdot f = g$ の証明:

$g = 1 \to f = 1 \cdot f = g \cdot f = g = 1$

$\therefore g \le f \quad (\because (1e))$

$g + f = f$ も同様。

大小関係は3.4(2)で調べる！！

直感的には(1).bが分かりやすい

一応5も証明：条件と（２）より、$f \cdot g = f \cap g \cdot f = g \therefore g = fg = gf = f$

練習問題

以下の不等式を証明しなさい

(1) $xy \leq x + y$

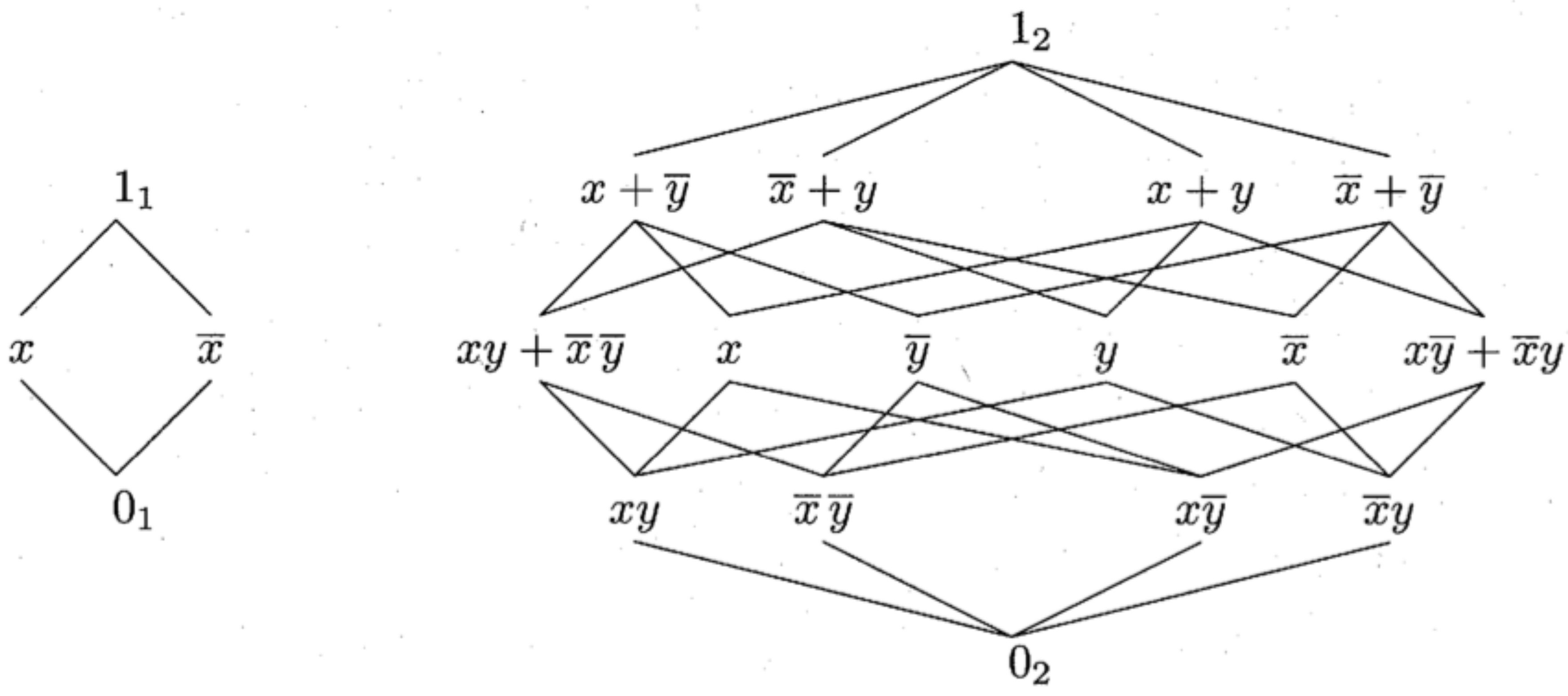
(2) $xyz \leq xy + yz + zx$

(3) $g \leq g + h$

(4) $g_1 \leq f_1, g_2 \leq f_2 \rightarrow g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$

(5) $g_1 \leq f_0, g_2 \leq f_0 \rightarrow g_1 + g_2 \leq f_0$

順序関係：ハッセ線図



(a) 1 変数関数　　(b) 2 変数関数

図 3.6　ハッセ線図

最小項 $m_i = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$

最大項 $M_i = x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + \cdots + x_n^{e_n}$

簡単化の準備その２：部分積項

- 最小項 $m_i = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ の**部分積項**とは、いくつかのリテラルを削除した積項の事
  - 最小項自体も部分積項の一つ
  - １つ以上のリテラルを削除した部分積項を**真部分積項**と呼ぶ
  - 部分積項の長さを $|m_i|$ で表す
- 例：5変数関数の最小項 $x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5$ に対して、$x_1 x_2 \overline{x}_5$ は長さ $|x_1 x_2 \overline{x}_5| = 3$ の真部分積項である

ちなみに、その１は先ほどの↓

論理式の簡単化の準備１：論理式の大小関係

部分積項の性質と簡単化の原理

命題3.6:部分積項の性質

$\tilde{m}$ が長さ k で、長さ n の最小項 m_i の部分積項である時

(1) $m_i \leq \tilde{m}$。つまり、部分積項は最小項より大きい（最小項を覆う）

(2) $\tilde{m}$ は 2^{n-k} 個の最小項を覆う。つまり、$|T_n(\tilde{m})| = 2^{n-k}$

証明：(1) べき等律から自明 ($m_i\tilde{m} = m_i$)

(2)以下の例を一般化する

(2) $g \leq f \Leftrightarrow g \cdot f = g \Leftrightarrow g + f = f$ 重要！

5 変数で $\tilde{m} = x_1x_2x_3$ の例を考える（つまり、$n = 5, k = 3$)。

$$x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3(x_4 + \overline{x}_4)(x_5 + \overline{x}_5) \quad (\because x + \overline{x} = 1, 1 \cdot x = x)$$

$$= x_1x_2x_3(x_4x_5 + x_4\overline{x}_5 + \overline{x}_4x_5 + \overline{x}_4\overline{x}_5)$$

これは 5 変数の最小項の和に等しい。項の数は $2^{n-k} = 4$。

(1) より、$\tilde{m}$ は最小項 m_i を覆うので、$\tilde{m}$ は 2^{n-k} 個の最小項を覆っている。

$|T_n(\tilde{m})| = 2^{n-k}$ は、最小項とそれを真とする変数への割り当てが 1 対 1 なので。

つまり 5 変数の論理関数が　　**簡単化の原理**

$$x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4\overline{x}_5 + x_1x_2x_3\overline{x}_4x_5 + x_1x_2x_3\overline{x}_4\overline{x}_5$$

を含めば、これら 4 つの項は $x_1x_2x_3$ という 1 つの項に置き換えることが出来る

簡単化の具体例

次式で与えられる 4 変数論理関数 f_1 で、$\overline{x}_3 x_4$ をくくり出してf_1を簡単化せよ

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + \\ & x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 \end{aligned}}$$

答えは黒板

命題3.6を難しく言う：内項と主項

命題 3.6.(1) より、$m_i \leq \tilde{m}$ なので全ての部分積項が $\tilde{m} \leq f$ となるわけではない

そこで 特に m_i の部分積項 $\tilde{m}$ の内、$\tilde{m} \leq f$ を満たすものを f の**内項**と呼ぶ

f の最小項 m_i について $m_i \leq f$ である $(\because g \leq g + h)$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i \in T(f)} m_i$

参考

最短の f の内項を**主項**と呼ぶ

(最短 =リテラルを 1 つでも削ると内項で無くなる)

何故短い事が重要なのか？

f の内項 $\tilde{m}$ が覆う最小項（2^{n-k} 個) はすべて f の最小項でもある

$(\because \tilde{m} \leq f,$ 命題 6.3.(2))

$\Rightarrow$ 短い部分積項 (k が小さい）ほど、多くの最小項を覆う

つまり、多くの最小項を 1 つに置き換えることができる

主項を見つける事で論理関数を簡単にする事ができる！！

問題：主項であることを示す

次式で与えられる 4 変数論理関数 f_1 で、$\overline{x}_3 x_4$ が主項であることを示せ

$$
\boxed{\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \\
& x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4 + x_1\overline{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1 x_2\overline{x}_3 x_4
\end{aligned}}
$$

示すべき事　$\overline{x}_3 x_4 \leq f_1$ かつ $\overline{x}_3 > f_1$ かつ $x_4 > f_1$

答えは黒板

主項は一つではない

$x_2\overline{x}_3, x_1\overline{x}_3, \overline{x}_1x_2, x_1\overline{x}_2x_4$ も f_1 の主項である

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$$

確認してみよう

論理関数は主項の和で表現できる

定理 3.7
$Q \subseteq P(f)$ となる主項の部分集合 Q が存在して、$f = \sum_{p_j \in Q} p_j$ となる

証明

$f = \sum m_i$ の時、各 m_i に対して、$m_i \leq p_j \leq f$ となる主項 p_j が存在する（主項の定義）。

この不等式の両辺の和を取って、$f = \sum_{T(f)} m_i \leq \sum_{p_j \in Q} p_j \leq f$ なので

$\cup_{p_j \in Q} T(p_j) = T(f)$ となる Q が存在すれば、$f = \sum_{p_j \in Q} p_j$ となる。

$Q = P(f)$ が条件を満たすので、少なくとも一つは条件を満たす Q が存在する。

具体例は次ページ！

具体例

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$$

T(f1)

TnがT(f)のどこをカバーしているか？

x1	x2	x3	x4	T1	T2	T3	T4	T5
0	0	0	1	○				
0	1	0	0		○		○	
0	1	0	1	○	○		○	
0	1	1	0				○	
0	1	1	1				○	
1	0	0	0			○		
1	0	0	1	○		○		○
1	0	1	1					○
1	1	0	0		○	○		
1	1	0	1	○	○	○		

主項の真値集合

$$\begin{array}{lcl}
T_1(\overline{x}_3x_4) & = & (\ x_1,\ x_2,\ 0,\ 1\ ) \\
T_2(x_2\overline{x}_3) & = & (\ x_1,\ 1,\ 0,\ x_4\ ) \\
T_3(x_1\overline{x}_3) & = & (\ 1,\ x_2,\ 0,\ x_4\ ) \\
T_4(\overline{x}_1,x_2) & = & (\ 0,\ 1,\ x_3,\ x_4\ ) \\
T_5(x_1\overline{x}_2,x_4) & = & (\ 1,\ 0,\ x_3,\ 1\ )
\end{array}$$

$$\cup_{p_j\in Q}T(p_j) = T(f)$$

$$Q = 1,3,4,5$$

2の主項 $(x_2\overline{x}_3)$ を使っても良いが、
他の主項とダブルので無駄

$$\boxed{f_1 = \overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2 + x_1\overline{x}_2x_4}$$

(・・*)。。oO(どうやって主項は探すの？)

必須主項：主項で、無いと f をカバー出来なくなる主項

(この例では２以外全てが必須主項)